

# 「高さ」について

1996年 5月

APA No. 64-5

財団法人 日本測量調査技術協会

中 根 勝 見

GPSなど宇宙技術の測地測量への応用が本格的になってきたが、「高さ」は我々の生活の「水の流れ」との関係で表現されているので、水準測量など従来測量によらなければならない。これまでのわが国の測量で扱っている高さは「標高」であるが、GPSによる測量が普及するなど計測技術の発展に伴い、理論及び実用の点からより厳密な見直しが要求されてきている。本稿では、高さについて考察、整理してみたい。

## 1. 地球の形

三角測量の高さの議論では、ジオイドについて曖昧のままでも、あまり問題にならなかった。しかし、GPS観測値と高さの関係では、ジオイドは重要な役割を占めている。まず、地球の形について考察してみたい。

地球の形と大きさについては古来からの発展があるが、19世紀に入ると三角測量により、地球楕円体が正確に決められるようになった。その代表的なものの一つが、ドイツの天文学者ベッセルにより1884年に決められたもので、この結果は日本の楕円体要素としても採用されている。一方、地球は、単なる幾何学的な形状としてだけでなく、物理的な視点でもとらえられていた。17世紀後半のニュートンによる万有引力の法則から導きだされる地球楕円体は、その代表である。次に示す1884年のヘルメルトの標準重力式もその一つである。ただし、 $\phi$ は緯度である。

$$\gamma_0 = 978.000(1 + 5.310 \sin^2 \phi) \text{ Gal} \quad (1)$$

ジオイドの概念は1873年にリスティングにより与えられた。地球の70%を占める海に注目して「平均的の海面とその陸地への延長」を地球の形と考えたのである。等ポテンシャル（静水）面により形成される地球で、物理的な視点からより詳細な形を説明したものである。以来地球の形は、第1次近似的には楕円体であるが、より詳細にはジオイドで表現されるようになって

てきている。

1957年の人工衛星の出現以来、その軌道の解析から地球の重力ポテンシャルが決められるようになってきた。その結果、これまでの地球楕円体要素も改訂されなければならないようになった。最新のものは1980年国際測地学及び地球物理連合（IUGG）で定められたもので「測地基準系1980（GRS 80）」と呼ばれている。その数値は、次のとおりである。

$$\text{長半径} \quad a = 6,378,137 \text{ m}$$

$$\text{扁平率} \quad f = 1/298.257$$

$$\text{地心引力定数} \quad GM = 39,860,047 \times 10^7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$\text{自転角速度} \quad \omega = 7,292,115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$$

この4量の定数により決められた地球楕円体を「正規楕円体」と呼んでいる。正規楕円体面上での正規重力ポテンシャル $U$ は一定値 $U_0$ である。言葉を換えれば、この地球楕円体は、等正規重力ポテンシャル面

$$U = U_0 \quad (2)$$

が赤道半径 $a$ 及び扁平率 $f$ の回転楕円体を形成するのである。地球を単なる幾何学的な形としてとらえているのではない。またこの4量から、正規重力ポテンシャルの勾配である正規重力を導きだし、それらは次式で与えられている。ただし、 $\phi$ は緯度である。

$$\begin{aligned} \gamma_0 = & 978.0327(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\ & + 0.000023271 \sin^4 \phi + 0.0000001262 \sin^6 \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

つい最近までの日本の水準測量に用いられていた標準重力は上の(1)式であった。一方、楕円体要素はベッセルであるので、地球の形として二つの異なった式を用いていたことになる。

## 2. ジオイドの定義及び正標高 (orthometric height)

現実の地球重力場がつくる等重力ポテンシャル( $W$ )面は無数にある。このうちで重力ポテンシャルが一定値 $W_0$ をとる

$$W = W_0 \quad (4)$$

なる面があるとする。 $W_0$ が、等正規重力ポテンシャル  $U_0$ と等しい

$$W = U_0 \quad (5)$$

のときの等重力ポテンシャル面  $W_0$ を「ジオイド」と定義する。これがジオイドの厳密な定義である(図1)。

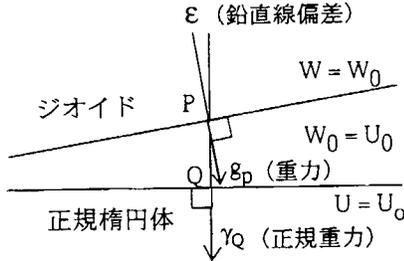


図1 ジオイド

このジオイド面からの鉛直方向の幾何学的な長さを「正標高」と呼んでいる。図2に示すように、水準測量により得られる高低差  $h$  と重力測量によって得られる重力値  $g$  により、ジオイド上の  $P_0$  点から  $P_1$  点までのポテンシャル  $C$  は  $(\sum gh)$  で表せる。ここに、 $C$  は「geopotential number」と呼ばれている。同様に、ジオイド面  $P_0$  から鉛直方向の  $P_1$  点までのポテンシャル  $C$  は、 $(\sum g'h')$  で表せる。従って、次式が成り立つ。

$$\sum gh = \sum g'h' \quad (6)$$

$P_0$  から  $P_1$  までの平均的な重力値を  $g_m$  とすると、正標高  $H^0$  は次式で表せる。

$$H^0 = C/g_m \quad (7)$$

しかし、現実には地上の観測量から、地殻内の平均的な重力値  $g_m$  を決めることはできない。別の言葉で言えば、ジオイドは厳密に決められないものである。

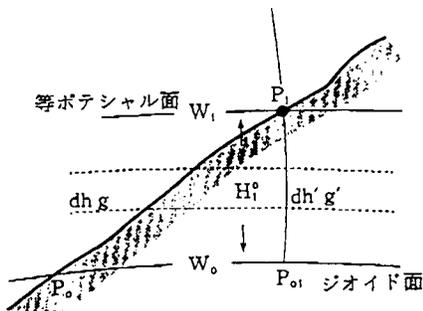


図2 正標高  $H^0$

### 3. ヘルメルト標高 (Helmert orthometric height)

地上の観測から  $g_m$  を決めることができないので、地殻内の近似的な平均的な重力値を用いた高さがある。最も多く使われている代表的な正標高の近似として、「ヘルメルト標高」がある。その式の誘導手順を次に示す。

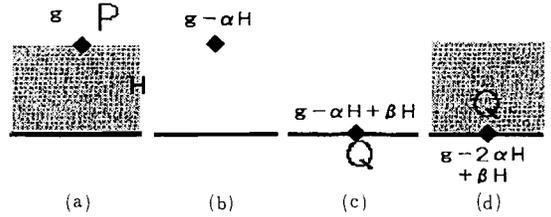


図3 ヘルメルト標高の重力値

図3(a)に示すように、高さ  $H$  上の  $P$  点の重力値を  $g$  とする。

基準面上の地殻を取り除いたときの  $P$  点での重力値は、取り除かれた物質による引力 ( $\alpha H$ ) だけ重力は小さくなり、 $(g - \alpha H)$  となる(図(b))。

$P$  点から基準面上  $Q$  点に移動したときの重力は、地心に近い分 ( $\beta H$ ) だけ大きくなる(図(c)) ので、 $(g - \alpha H + \beta H)$  となる。

取り除いた地殻を元に戻すと、 $Q$  点における重力は、戻された地殻により上の方に引かれ ( $\alpha H$ ) だけ小さくなり、 $(g - \alpha H + \beta H - \alpha H) = \{g + (\beta - 2\alpha)H\}$  となる(図(d))。

地殻の平均密度を  $2.67$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ) 及び万有引力定数を  $6.672 \times 10^{-8}$  ( $\text{g}^{-1}\text{cm}^3 \text{s}^{-2}$ ) として、 $\alpha = 0.1119$  ( $\text{mgal}/\text{m}$ ) 及び  $\beta = 0.3086$  ( $\text{mgal}/\text{m}$ ) が導かれるので、深さ  $H$  の地殻内の重力値は  $(g_p + 0.0848)$  で表せる。平均的な重力値は  $H/2$  の場所であるから、結局  $g_m$  の代わりに次式が用いられる。

$$g_H = g_p + 0.0424 H \quad (8)$$

従って、ヘルメルト標高は、次式で表されることになる。

$$H^H = C/g_H \quad (9)$$

### 4. 水準高 (levelled height) と楕円改正 (normal orthometric correction)

日本の水準測量や三角測量のような近代的測量は、明治16 (1883) 年頃に開始された。全国の高さの骨格は、東京にある水準原点を出発点にして、1等水準測

量により決められた。第1回目の1等水準測量が全国をカバーしたのは大正2（1913）年であった。この水準測量による高さは、明治39（1906）年杉山正治測量師の「重力改正」の提案があるまで、水準測量から得られた高さをそのまま「真高」としてきた。杉山は“水準高の計算に重力偏差より起こる改正数を加えること”と提案した。この提案は、大正4（1915）年に定められた作業規程である「1等水準測量実行法」に採用され「地球の楕円形より起こる改正数の計算」と説明され、「楕円改正」と呼ばれるようになった。その計算式は、次式で与えられた。

$$K = -5.31 H \sin 2\phi \cdot (\phi_Q - \phi_P) / \sigma' \quad (10)$$

ここに、Hは水準測量路線の平均の高さ、 $\phi_P$ 及び $\phi_Q$ は水準測量路線の出発点及び終点の緯度、 $2\phi = \phi_Q + \phi_P$ 、 $\sigma' = 3437.9$ である。この楕円改正に用いた重力式は、1884年ヘルメルトにより定められた(1)式である。水準高にこの楕円改正を加えた高さを「標高（normal orthometric height）と呼び、日本では正標高の近似値としている。

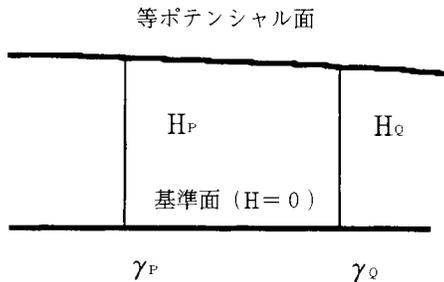


図4 楕円改正

日本の測量の高さは、「東京湾の平均海水面を陸地まで延長した等ポテンシャル面から鉛直方向の幾何学的長さ」で定義されている。図4に示すように、等ポテンシャル面の比較的近い2点P及びQの高さ並びに重力値をそれぞれ $H_P$ 及び $H_Q$ 並びに $\gamma_P$ 及び $\gamma_Q$ とする。等ポテンシャル面であるから、次式が成り立つ。

$$H_P \gamma_P = H_Q \gamma_Q \quad (11)$$

従って、高さの差は次式で表せる。ただし、高さによる重力の減少は小さいので無視する。

$$\begin{aligned} H_P - H_Q &= H_P - H_P (\gamma_P / \gamma_Q) \\ &= H_P \{ 978.000 (1 - 5.31 \sin^2 \phi_P) / 978.000 \\ &\quad (1 - 5.31 \sin^2 \phi_Q) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= H_P (1 - 5.31 \sin^2 \phi_P + 5.31 \sin^2 \phi_Q) \\ &= H_P \{ 1 - 5.31 \sin(\phi_P + \phi_Q) \sin(\phi_P - \phi_Q) \} \\ \therefore H_Q &= H_P + 5.31 H_P \sin(\phi_P + \phi_Q) \sin(\phi_P - \phi_Q) \quad (12) \end{aligned}$$

この式において、 $\phi_P$ と $\phi_Q$ が近傍の点であるとして(10)式が導かれる。

従って、(10)式を用いて $\phi_P = 0^\circ$ 、 $\phi_Q = 90^\circ$ などとして計算するのは誤りで、赤道から極まで計算したい場合は $10^\circ$ 間隔位に分割して計算してその和をとらなければならない。分割して計算することは、先に述べた大正の実行法でも指示されている。(10)式を見て分かるように、北半球において標高が正の場合、南から北に進む水準路線では、楕円改正は「負」である。その大きさは「標高100 m、緯度差10 km、楕円補正1 mm」程度と覚えておくことと大きな誤りの発見が容易である。また、この楕円補正について一部に「楕円体である地球を球と仮定したために生じる僅かな誤差の補正」などの誤解もあるが、「地球を楕円体としたことにより等ポテンシャル面が非平行になるための補正」とした方がいくらか正しい記述であろう。なお、国土地理院の水準測量の計算簿を見ると、昭和50（1985）年頃から計算式の数値「5.31」が「5.29」に変わっている。この変更は、(3)式を用いても「5.29」が得られるが、1967年に国際的に定められた正規重力式を用いた結果と思われる。

## 5. 正規高（normal height）

正標高は、地上の観測値を用いて決められないものである。こんなあてにならない高さにこだわるのではなく、得体の知れない $g_m$ の代わりに正規重力 $\gamma$ を用いるよう1950年代にモロデンスキーにより提案された。地上の観測量だけで処理するというもので、不分明なジオイドに立脚しないのが現代的な測地学の考え方である。

重力の鉛直勾配は緯度の関数であるが、平均的な $0.3086(\text{mgal/m})$ を用いて表した正規高は次式である。

$$H^N = C / (\gamma_0 - 0.1543 H) \quad (13)$$

この式は「vignal 正規高(normal height)」と呼ばれているもので、ヨーロッパの水準網の統一のために採用されている。

正規高について本稿では詳しく記述しなければならないが、筆者の知識では誤解を生じる内容になる可能性が高いので、これ以上の詳述を避けることにする。

## 6. 力学高 (dynamic height)

正標高及び正規高は同じ高さであっても、それらの点は等ポテンシャル面となっていない。同じ高さでも静水面でなく、水は移動するのである。それに対して等ポテンシャル面を同じ高さで定義したのが、力学高である。調査地域の平均的な重力値  $g_D$  として、力学高は次式で表せる。

$$H^D = C/g_D \quad (14)$$

図5に示すように、北半球における高さが正の場合、北側の方が幾何学的高さは低いことになる。

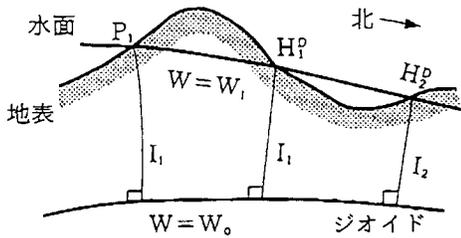


図5 力学高 ( $H^D$ )  
 $I_1 > I_2$   $H_1^D = H_2^D$

## 7. 楕円体高

日本測地系は、東京原点において天文経緯度と測地経緯度が一致するようにし、楕円体とジオイドが接するようにされている(図6)。また、東京原点において天文方位角と測地方位角を一致させ、楕円体のZ軸を地球の自転軸に平行になるようにされている。このようにして地球に張り付けられた楕円体は、「準拠楕円体」と呼ばれている。従って、日本測地系における楕円体高は、この準拠楕円体の法線方向の長さで表される。

天頂距離観測及び水準測量などの従来測量は鉛直線

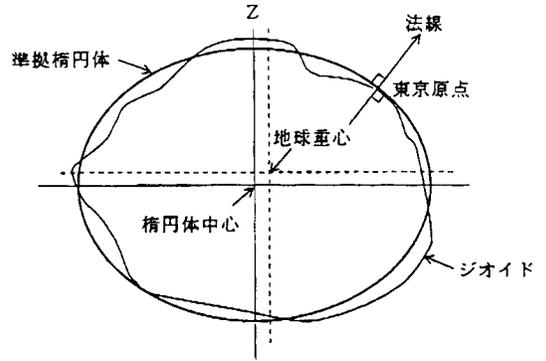


図6 準拠楕円体

を基準にしているので、これらの観測から得られた高さはジオイドを基準としていると言える。しかし、GPS 観測から得られる高さは、楕円体高である。実際は、調査地域内に基準として設けた点を零とした楕円体比高である。下の表は、日本各地の標高H、楕円体高h及びジオイド高Nについて、表したものである。これらの関係は次式で表されるので、

$$h = H + N \quad (14)$$

$H=0$ としたとき  $h=N$  で表される。この表のジオイド高Nがその地域付近の海面の楕円体高とみて差し支えない。日本測地系の場合、稚内付近の海面を東京測地系の楕円体高で表すと、約-55 mとなる。WGS 84の楕円体の中心は、地球重心に1 m程度の精度で一致しているといわれている。そのWGS 84の楕円体高も表に示してあるが、東京付近のジオイド高は約37 mである。いづれにしてもGPS 観測から得られた楕円体(比)高は、実用的な高さではない。何らかの方法で、正確なジオイド高を知り(14式)の関係から標高を計算しなければならない。

表 標高、楕円体高及びジオイド高の関係

(国土地理院測地部基準点座標92より、単位 m)

場 所	標高 H	日本測地系		WGS 84	
		ジオイド高	楕円体高	ジオイド高	楕円体高
新富(九州)	74.39	-17.73	56.66	27.46	101.85
東京原点	25.40	0.00	25.40	37.19	62.59
筑波	25.18	0.96	26.14	40.03	65.21
水沢(東北)	131.66	-9.52	122.14	42.08	173.74
新十津川(北海道)	82.86	-40.23	42.63	31.32	114.18
稚内(北海道)	14.61	-54.57	-39.96	25.76	40.37

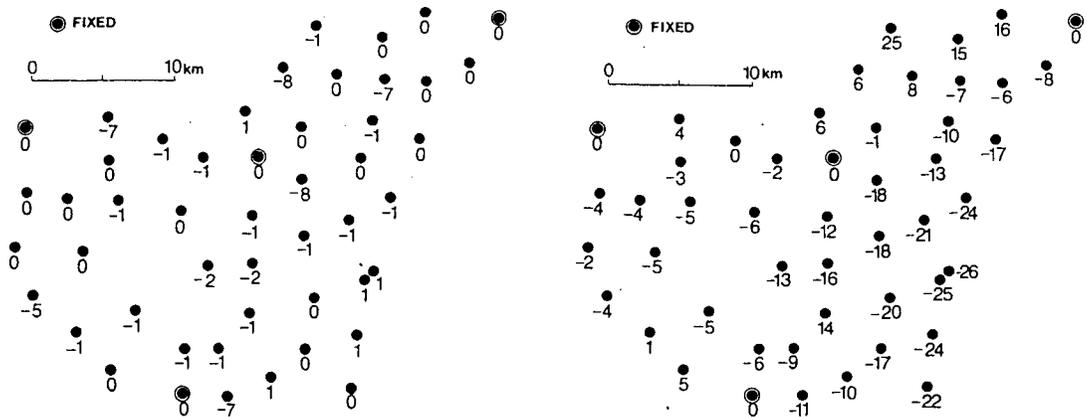


図7 水準測量による高さと GPS 観測値から推定した高さの格差 (単位 cm)  
 左図：ジオイド高と GPS 観測値との統合処理結果。  
 右図：基準点測量作業規程による処理結果 (右図)。

Kuroishi (1995) により日本付近のジオイドモデルが開発された。このジオイドモデルは、間もなく国土地理院から公表されると聞いている。そうすれば、GPS 観測から得られた楕円体高は、容易に標高に変換できることになる。

試しに JGEOID 93 を用い、GPS 観測から標高を計算した。図 7 は千葉県房総半島における GPS 測地網である。全点の標高が水準測量により正確に決められている。2 重丸で示した 4 点の標高を固定して内挿により標高を推定し、水準測量から得た標高との差を求めた。図に示した数値は GPS により求めた標高の誤差と思えばよい。

右図は国土地理院の作業規程による方法で計算した場合の標高誤差である。ジオイド面が全域で一樣な面と仮定しているために、大きな標高誤差をつくりだし

ているのである。この場合、与点をもっと多くしなければならない。

左図は、JGEOID 93 を用いて内挿した場合の標高誤差である。著るしく内挿精度が改善されていることがわかる。

#### 主な参考文献

- kuroishi Y. (1995) : Precise Gravimetric Determination of Geoid in the Vicinity of Japan. Bull. GSI, 41, 1-93.
- Vanicek P. and Krekiwsky E. (1984) : Geodesy : The Concepts, North Holland Publ. Co., Amsterdam.
- 中根勝見・黒石裕樹 (1996) : 日本の測地測量における統合処理の考察 (II)、国土地理院時報 No 85, 1-17.

(国土地理院地殻調査部)